トーリック曲面のブローアップの変異と q-Painlevé 系
arXiv: 2008.11219

水野勇磨

千葉大学 学振 PD

2022 年度函数方程式論サマーセミナー
2022 年 8 月 11 日

離散 Painlevé 系

- 有理曲面の族への作用として構成される (初期値空間) [Sakai]
- 初期値空間の構成の仕方はひとつではない
  - $\mathbb{P}^2$ 内の 9 点のブローアップ
  - $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内の 8 点のブローアップ

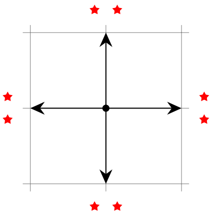
q-Painlevé 系

- 離散 Painlevé 系は楕円型・乗法型・加法型に分類される [Sakai]
- この講演では乗法型 (=q-Painlevé 系) の話をします

Proposition

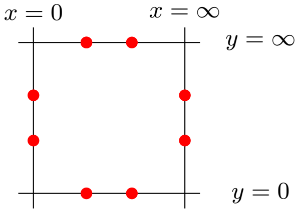
q-Painlevé 系の初期値空間はトーリック曲面の境界上の非特異点でのブローアップの族として構成できる

- 例: $D_5^{(1)}$ 型 q-Painlevé 系の初期値空間



トーリック扇

$\rightsquigarrow$

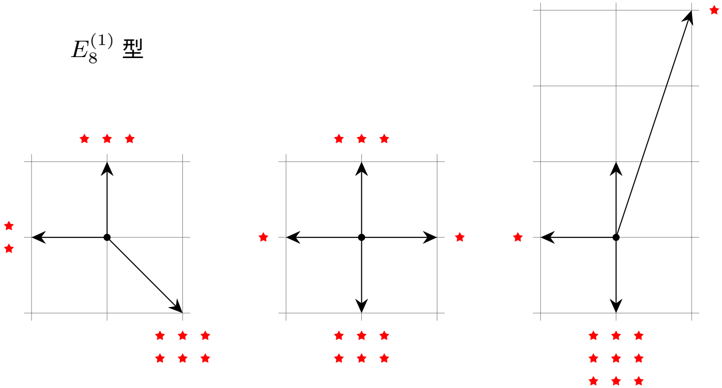


$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の境界

- 左図のデータを種子という

- 初期値空間の構成の仕方 (種子の選び方) はひとつではない

$E_8^{(1)}$ 型



- 実は無限個あることがわかる

Theorem

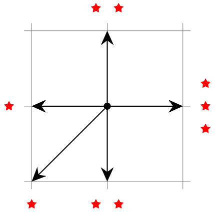
同型な q-Painlevé 系を与える種子は変異の列によって移り合う

種子

Definition

N を反対称双線形形式を備えた自由アーベル群とする．N における種子とは N 内の多重集合のこと．

例: $s = \{(1,0),(1,0),(1,0),(0,1),(0,1),(-1,0),(-1,-1),(0,-1),(0,-1)\}$ は $\mathbb{Z}^2$ における種子

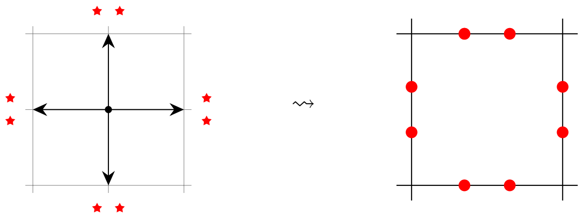


以下では常に $N = \mathbb{Z}^2$(外積を備えている) の場合を考え，種子 s についても次を仮定:

- $\forall v \in s,\ v$ は primitive
- s は $\mathbb{Q}^2$ を $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として生成する

種子から初期値空間を作る

1. 種子 s を ray の生成元として含む完備で滑らかなトーリック扇 Σ を選ぶ
   - トーリック曲面 $\mathrm{TV}(\Sigma)$ が定まる
   - orbit-cone 対応: $\{\mathrm{TV}(\Sigma)$ の境界の連結成分 $\} \cong \{\Sigma$ の ray$\}$
2. 各 $v \in s$ に対応する $\mathrm{TV}(\Sigma)$ の境界の連結成分上の点 p_v を選ぶ
3. s 上の順序を選ぶ
   - 点 p_v $(v \in s)$ でのブローアップの合成 $\pi : Y \to \mathrm{TV}(\Sigma)$ が定まる
   - $D \in \mathrm{Pic}(Y)$ を $\mathrm{TV}(\Sigma)$ の境界の強変換とする



トーリック扇 $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の境界

Remark

実際には点 p_v の選択は直接行わず，このようにして得られる代数曲面 (log Calabi-Yau 曲面) の族を構成する

変異

Definition

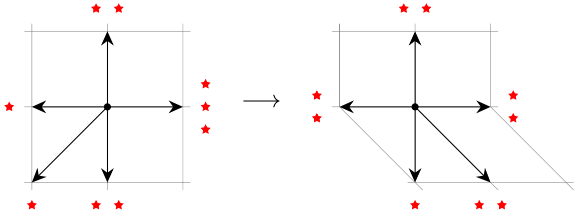
種子 s から s' への変異 $\mu_v : s \to s'$ とは:

- $v \in s$
- s' は s から次の式で得られる

$$s' = (P(s) \setminus \{v\}) \sqcup \{-v\},$$

ここで P は区分線形写像 $n \mapsto n + \max(n \wedge v, 0) \cdot v : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$

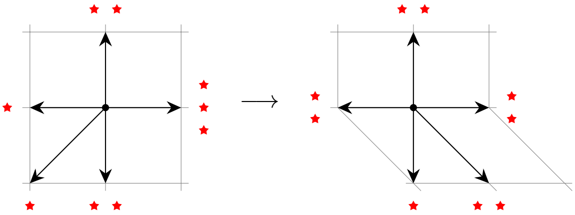
$\mu_{\to}$:



Proposition (cf. Hartshorne 例 5.7.1 基本変換)

変異 $\mu_v : s \to s'$ は同型 $Y \to Y'$ を誘導する.

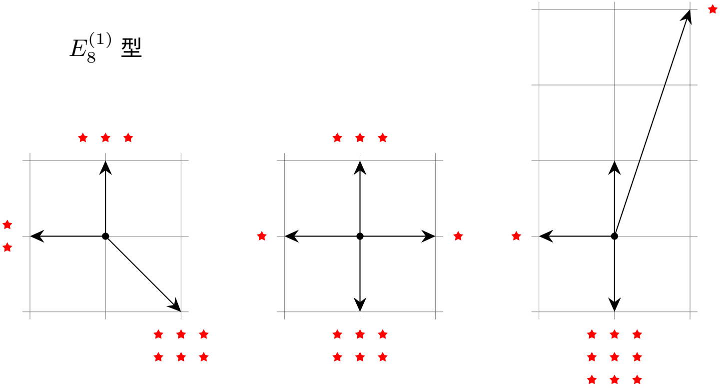
$\mu_{\to}$:



変異同値

- 変異と $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 変換の形式的な合成をクラスター変換という
- クラスター変換で結ばれるふたつの種子は変異同値であるという

$E_8^{(1)}$ 型

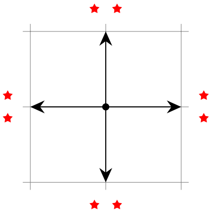


q-Painlevé 系の特徴付け

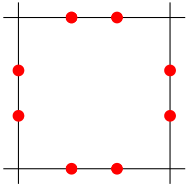
- q-Painlevé 系に対応する初期値空間は一般 Halphen 曲面の族 [Sakai]

Proposition

種子 s から定まる代数曲面 Y が一般 Halphen 曲面である必要十分条件は D の交差行列がアフィン型であること

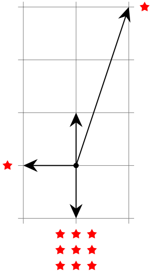


$\rightsquigarrow$



$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

扇を用いた交差行列の求め方



$$D^2_{(1,0)} = 0 - 1 = -1$$

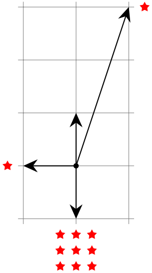
$$D^2_{(0,1)} = -3 - 0 = -3$$

$$D^2_{(-1,3)} = 0 - 1 = -1$$

$$D^2_{(0,-1)} = 3 - 9 = -6$$

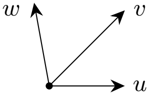
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

扇を用いた交差行列の求め方



$$D^2_{(1,0)} = 0 - 1 = -1$$
$$D^2_{(0,1)} = -3 - 0 = -3$$
$$D^2_{(-1,3)} = 0 - 1 = -1$$
$$D^2_{(0,-1)} = 3 - 9 = -6$$

$D^2_v = m - n$ の求め方:

1. m は 

$u + mv + w = 0$ で決まる
2. $n =$ blowup の回数 $= v \in s$ の重複度

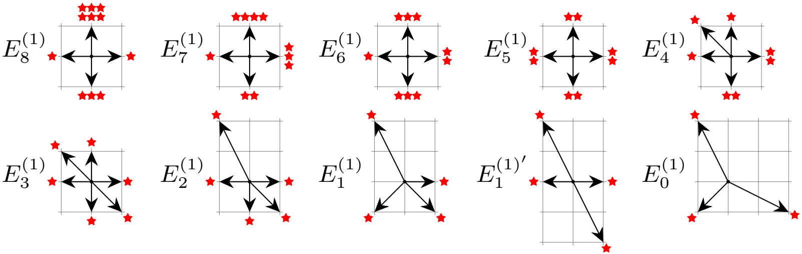
主定理の証明

Theorem

同型な q-Painlevé 系を与える種子は変異同値

Kasprzyk-Nill-Prince による Fano polygon のあるクラスの分類に帰着

1. size : $\{q$-Painlevé 系を与える種子 $\} \to \mathbb{N}$ を定義
2. size に関して極小な種子が有限個であることを示す $(35$ 個$)$
3. それらについての変異同値類を調べる $(10$ 個$)$



クラスターポアソン多様体

- 種子 s についてクラスターポアソン多様体 $\mathcal{X}(s)$ が定まる

$$\mathcal{X}(s) = \bigcup_{\mu : s \text{ が始点のクラスター変換}} (\mathbb{C}^*)^n$$

- クラスター変換 $\mu : s \to s'$ について同型射 $\mathcal{X}(\mu) : \mathcal{X}(s) \to \mathcal{X}(s')$ が定まる

Theorem (Gross-Hacking-Keel)

変異から定まる同型射は (余次元 2 の差を除いて) 初等変換と一致する.

$\rightsquigarrow$ クラスターポアソン多様体はトーリック多様体のブローアップによって構成される初期値空間 (の内部) と本質的に同じ

クラスター代数と q-Painlevé 系

- $\mu : s \to s'$ について同型射 $\mathcal{X}(\mu) : \mathcal{X}(s) \to \mathcal{X}(s')$ が定まる
- 特に $\mu : s \to s$ について自己同型 $\mathcal{X}(\mu) : \mathcal{X}(s) \to \mathcal{X}(s)$ が定まる
- このようにして得られる自己同型群をクラスターモジュラー群という

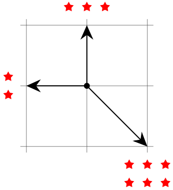
Theorem (Bershtein-Gavrylenko-Marshakov)

q-Painlevé 系の対称性 (Cremona 等長群) はクラスターモジュラー群の部分群として実現される

q-Painlevé 系について次のことがわかる

- $\mathbb{N}$ 上定義可能 $\rightsquigarrow$ トロピカル化
- 量子化

例: $E_8^{(1)}$ 型の q-Painlevé 系

$s =$ 

- $W = \langle r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8 \rangle$ を $E_8^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群とする
- C をカルタン行列とする

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 8 & & & & \\
 & & & & & & & & & & | & & & & \\
0 & — & 1 & — & 2 & — & 3 & — & 4 & — & 5 & — & 6 & — & 7
\end{array}
$$

作用 $\iota : W^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{X}(s))$ は以下の表示を持つ:

$$\begin{aligned}
&\iota(r_i)(a_j) = a_j a_i^{-C_{ij}} \\
&\iota(r_8)(f) = a_8^{-1} f, && \iota(r_6)(g) = a_6 g \\
&\iota(r_5)(f) = f\frac{a_5 + a_5 f + g}{1 + f + g}, && \iota(r_5)(g) = g\frac{1 + a_5 f + g}{a_5(1 + f + g)}
\end{aligned}$$

- クラスターポアソン多様体 $\mathcal{X}(s)$ は $|s| - 2(= 9)$ 次元の代数的トーラスを底空間とする 2 次元スキームの族
- $a_0, \ldots, a_8$ は底空間の座標
- 作用は実際にはクラスター変換で定まる
- 上の表示は変異に対応する有理変換を合成することで機械的に求まる